Γ΄ ΤΑΞΗ

4ο ΓΕΛ ΜΥΤΙΛΗΝΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)
ΚΥΡΙΑΚΗ 6/2/2013

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και $f(\alpha)\neq f(\beta)$, να δείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0)=\eta$. **Μονάδες 7**

Α2. Αν f,g είναι δύο συναρτήσεις με πεδίο ορισμού A,B αντιστοίχως, τι ονομάζουμε σύνθεση της f με την g;

Μονάδες 4

Α3. Πότε μια συνάρτηση $f:\mathbf{A}\to\mathbf{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1; **Μονάδες 4**

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+g(x)\right)=l$, $l\in\Re$ τότε οι συναρτήσεις f, g έχουν πάντοτε όριο στο x_0. **Μονάδες 2**

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$ **Μονάδες 2**

γ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα [α, β], τότε το σύνολο τιμών της είναι [f (β), f (α)]. **Μονάδες 2**

δ) Αν z = α + βi, με $\alpha, \beta \in \Re$ και z = 0, τότε α = 0 ή β = 0. **Μονάδες 2**

ε) Η εξίσωση, $|z - z_0| = \rho$ παριστάνει στο μιγαδικό επίπεδο κύκλο με κέντρο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ. **Μονάδες 2**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο $[-3,3]$, για την οποία ισχύει

$$3x^2 + 4f^2(x) = 27 \quad \text{για κάθε } x \in [-3,3]$$

Β1. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. **Μονάδες 6**

Β2. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3,3)$. **Μονάδες 6**

Β3. Να βρεθεί ο τύπος της f. **Μονάδες 6**

Β4. Αν επιπλέον ισχύει $f(1) = \sqrt{6}$ να βρείτε το

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}.$$

Μονάδες 7

Γ΄ ΤΑΞΗ

ΘΕΜΑ Γ

Έστω Z και W δυο διαφορετικοί και μη μηδενικοί μιγαδικοί αριθμοί. Θεωρούμε τη συνάρτηση :

$$f(x)=\frac{2|z|^x+|w|^x}{|z|^x+2|w|^x}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=2x_0^{2010}$ **Μονάδες 9**

Γ2. Αν ισχύει: $4|z|^2>|z+w|^2+|z-w|^2$, τότε :

α) να αποδείξετε ότι $|z|>|w|$ **Μονάδες 9**

β)να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x)=-2x^5-|z|\,x^3+2|z|^5,\ x\in\mathbf{R},\ z\in\mathbf{C}^*$$

Δ1. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία

Μονάδες 6

Δ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 6

Γ΄ ΤΑΞΗ

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,|z|)$.

Μονάδες 6

Δ4. Αν $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-f(x)+2|z|^5}{\eta\mu^3 x}=1$, να βρείτε το γεωμετρικό τόπο, στον οποίο ανήκουν οι εικόνες του μιγαδικού αριθμού z.

Μονάδες 7

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ